La trigonometría del Almagesto

Una aplicación didáctica de la historia de la ciencia

David Galadí-Enríquez[1]

Dedicado a Guillermo Molina Garrido,
profesor que sabe enseñar

Cuando estudiamos o presentamos en clase las matemáticas modernas, concentramos toda la atención en el formalismo, su significado y sus aplicaciones, sin detenernos casi nunca en cuestiones históricas. Sin embargo, buena parte de las herramientas de cálculo que se enseñan en bachillerato tiene muchos siglos de evolución y de historia. Investigar el tratamiento dado en otras épocas a ciertas disciplinas matemáticas es un ejercicio interesante y que puede ayudar a entender mejor el planteamiento moderno. En este artículo presentamos una comparación entre la trigonometría básica actual y la que se emplea en el ***Almagesto*** **de Tolomeo, representativa de la que se hizo en occidente desde el siglo II hasta el final de la edad media. Esta mirada al pasado sugiere ejercicios y experiencias que pueden llevarse al aula hoy día para profundizar en el estudio de las razones trigonométricas.**

1 La trigonometría de hoy y la de ayer

No es este el lugar para un compendio de trigonometría básica, pero sí para hacer algunos comentarios generales que ayuden a entender la trigonometría antigua y sus diferencias con la que empleamos hoy en día.

La trigonometría que se enseña en bachillerato actualmente está basada en dos razones trigonométricas: *seno* y *coseno*. Es cierto que frecuentemente se introducen hasta seis, añadiendo a las anteriores *tangente, cotangente,*

[1]Licenciado en física por la Universitat de Barcelona

secante y *cosecante*; pero estas cuatro razones adicionales se reducen trivialmente a las dos fundamentales. La de hoy es *una trigonometría de dos razones.*

Hasta de los libros más básicos han desaparecido las otrora imprescindibles tablas trigonométricas, sustituidas con ventaja por las calculadoras digitales de bolsillo. Así, la interacción del alumnado con las operaciones concretas de evaluación de las funciones trigonométricas se ha esfumado totalmente. Cuando se trata de hacer cálculos concretos, todo el proceso es un misterio que ocurre en el interior de la máquina. Los cálculos trigonométricos *están alejados de la experiencia empírica.*

Pero más que al cálculo concreto, la trigonometría que enseñamos está orientada al análisis abstracto. Los senos y los cosenos, con sus argumentos en radianes y su cristalina simetría, encuentran su lugar natural en el cálculo diferencial e integral, donde otras funciones trigonométricas concebibles u otras unidades de medida, por muy humanas que pudieran parecer, harían proliferar los factores y el número de términos. El seno y el coseno son las funciones trigonométricas *naturales del análisis matemático.*

Por las herramientas de cálculo disponibles y por las aplicaciones a las que iba orientada, la trigonometría antigua, aunque equivalente a la moderna desde un punto de vista lógico, se concretaba de una manera diferente: *empleando una sola razón trigonométrica*, la cual estaba *ligada íntimamente a la experiencia empírica* y que en su formulación y en sus unidades *se ajustaba a las necesidades del usuario humano.*

2 Dos definiciones de una razón única

La única razón trigonométrica empleada por los antiguos no era ninguna de las usuales hoy día. La razón trigonométrica del *Almagesto* y de la astronomía medieval se llama *cuerda*. La cuerda de un ángulo α se representa por crd α. Para la mentalidad moderna la manera ideal de definir la cuerda es recurrir a las funciones trigonométricas usuales. La expresión es bien simple:

$$\text{crd } \alpha = 120 \text{ sen} \tfrac{\alpha}{2}$$

Dada así, sin más, esta razón parece caprichosa. Y a poco que pensemos en ella se nos antojará incluso muy inconveniente. Cualquiera de las expresiones trigonométricas que llenan los libros de bachillerato, traducida en términos de cuerdas se convierte en un galimatías de cuadrados, raíces, fracciones y factores enormes. Evidentemente, no es la cuerda la razón trigonométrica más adecuada a nuestros fines actuales. ¿Lo era para los antiguos? Desde luego que sí, por varias razones. Podemos empezar a entreverlo si damos no la definición anterior (abstracta) de cuerda, sino una definición operativa, *puramente empírica*, cercana a la definición estándar de la época medieval. Si se toman dos segmentos iguales de sesenta unidades de longitud unidos por dos de los extremos, la distancia entre los extremos libres es igual a la cuerda del ángulo que forman los segmentos. La simpleza de la definición operativa queda aún más patente si se recurre a una figura (fig. 1). El sentido y la utilidad de la función cuerda para la astronomía medieval quedará patente cuando examinemos algo más en detalle algunas de sus propiedades.

3 Propiedades de la función cuerda

En la figura 2 hemos representado las funciones seno, coseno y cuerda para ángulos de 0 a 360°. Para facilitar la comparación, la cuerda ha sido dividida entre 120, con lo que se convierte simplemente en la función $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

Si pretendemos hacer trigonometría sin herramientas automáticas (calculadoras), conviene disponer de una función trigonométrica que no sea ambigua en el rango de valores angulares que nos interese, de manera que baste el cálculo de una única razón para determinar unívocamente los ángulos. En la astronomía de posición descrita en el *Almagesto* se trabaja con ángulos positivos entre 0 y 180°. En este intervalo el seno no cumple esta condición y, por tanto, no es adecuado. Podría parecer que el coseno sí lo es, porque no es ambiguo en este rango, pero presenta el inconveniente conceptual (desde el punto de vista medieval) de adoptar valores negativos para ángulos mayores que un recto. La cuerda, en cambio, se comporta bien: permite determinar unívocamente ángulos entre 0 y 180°, y el valor de la función es siempre positivo.

En la figura 3 representamos la función cuerda en el primer cuadrante. La recta de trazo fino es la bisectriz $y = x$. Queda claro a la vista de esta gráfica, que la cuerda de un ángulo es una buena aproximación al valor del propio ángulo *medido en grados*, siempre que nos restrinjamos a ángulos menores que 80°. La curva de trazo discontinuo en la figura 3 representa el tanto por ciento de error cometido al tomar el ángulo (en grados) en lugar de su cuerda. Como podemos comprobar, este error es inferior siempre al 5% entre 0 y 80°. Esto supone una ventaja evidente al hacer cálculos aproximados.

En la misma figura 3 podemos comprobar algo que es obvio a poco que lo pensemos: la cuerda de sesenta grados es... *justamente sesenta*. No es una casualidad, sino algo buscado expresamente al definir la función cuerda. Como se observa trivialmente en la figura 4, la afirmación crd(60°=60 es equivalente a decir que *en un triángulo equilátero, los tres lados son iguales*. Vemos, pues, que la definición de la cuerda está adaptada expresamente al sistema de unidades empleado para medir ángulos, de modo que el valor numérico del ángulo de un triángulo equilátero coincida con el valor de su cuerda. Para los cálculos del *Almagesto* ello tiene aún más valor, puesto que en esa obra se emplea la base sesenta no sólo para la medida de ángulos, sino para expresar todas las cantidades numéricas. El sesenta es así a la vez base de la numeración y cantidad mágica de la función trigonométrica. Hoy día empleamos base diez en la numeración y base sesenta en la medida usual de ángulos, pero el número mágico de nuestras funciones trigonoméricas no es ninguno de esos dos, sino el irracional π.

4 Aplicación didáctica: construcción empírica de una tabla de senos

Uno de los atractivos mayores de la función cuerda es la facilidad con que se puede materializar recurriendo a su definición empírica. Un par de reglas y un trasportador de ángulos convierten el pupitre y las propias manos en una herramienta de evaluación de razones trigonométricas que, si bien no es tan rápida ni precisa como las calculadoras electrónicas, tiene la ventaja de funcionar de manera transparente y totalmente controlada. Sin duda la fácil materialización de la cuerda fue importante en los albores de la trigonometría, cuando la medición directa era tal vez el único modo de evaluarla. Sin embargo, ya en el siglo II de nuestra era, Tolomeo disponía de argumentos geométricos suficientes para construir una tabla completa de cuerdas de medio en medio grado, con facilidades para la interpolación, exacta hasta la tercera cifra sexagesimal (tres diezmilésimas) y elaborada sin recurrir a la medición directa. Todo un capítulo preliminar del *Almagesto* está dedicado a la construcción de semejante tabla: toda una exhibición de ingenio y precisión, sin recurrir al cálculo diferencial.

Una explicación de la cuerda y sus propiedades, aderezada si se quiere con detalles históricos, puede aprovecharse en el aula para introducir una *práctica de matemáticas*: elaborar de manera empírica una tabla de senos. El dispositivo experimental es tan sencillo como el mostrado en la figura 5: sobre una cartulina suficientemente grande se traza un segmento fijo de 60 cm. Un segundo segmento (de cartulina o madera) de igual longitud se une al anterior por uno de los extremos, de manera que se pueda variar a voluntad el ángulo que forman. Un trasportador se emplea para medir el ángulo con una precisión de un grado, y una regla milimetrada bastante larga permite evaluar *de manera directa* la cuerda.

Si la experiencia se prepara con antelación y se coordina todo el alumnado de un grupo, en una sesión es posible elaborar una tabla de senos completa entre 0 y 90° si se evalúa empíricamente la cuerda cada dos grados entre 0 y 180. Al realizar las medidas se irá completando una gran tabla en la que junto a cada ángulo (de 0 a 180) se anotarán su cuerda, el ángulo mitad y la cuerda dividida entre 120. Las dos útimas columnas constituyen la tabla empírica de senos. La precisión de cada medida puede mejorarse promediando varias determinaciones (realizadas por el mismo o por distintos individuos). Por debajo de 20° son de esperar errores superiores al 5%, que crecen muy rápidamente para ángulos pequeños. Para estos ángulos, por tanto, aproximar la cuerda por el valor del ángulo en grados puede ser preferible a la medida directa.

En la tabla adjunta se muestran algunos resultados obtenidos aplicando este método: se comprueba que la experiencia es factible. El *Almagesto*, una de las obras científicas más trascendentes de todos los tiempos, puede ser todavía de valor formativo dieciocho siglos después de haber sido escrito.

Tabla 1:Algunos resultados de la experiencia

α	crd α	$\beta = \frac{\alpha}{2}$	sen$\beta = \frac{\text{crd}\alpha}{120}$	senβ teórico	error relativo
5°	5.0	2.5°	0.0417	0.0436	4.4%
10°	10.0	5.0°	0.0833	0.0872	4.5%
20°	20.6	10.0°	0.1717	0.1737	1.2%
30°	30.6	15.0°	0.2550	0.2588	1.5%
50°	50.6	25.0°	0.4217	0.4226	0.2%
60°	59.8	30.0°	0.4983	0.5000	0.3%

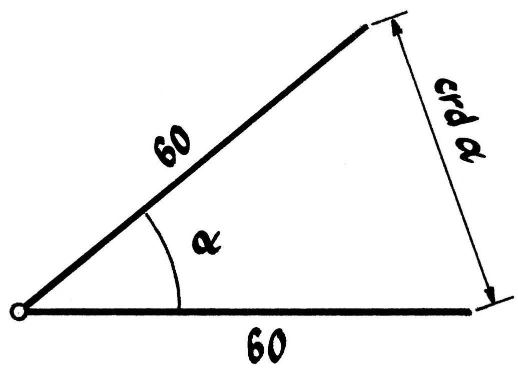

Figure 1: Definición empírica de cuerda

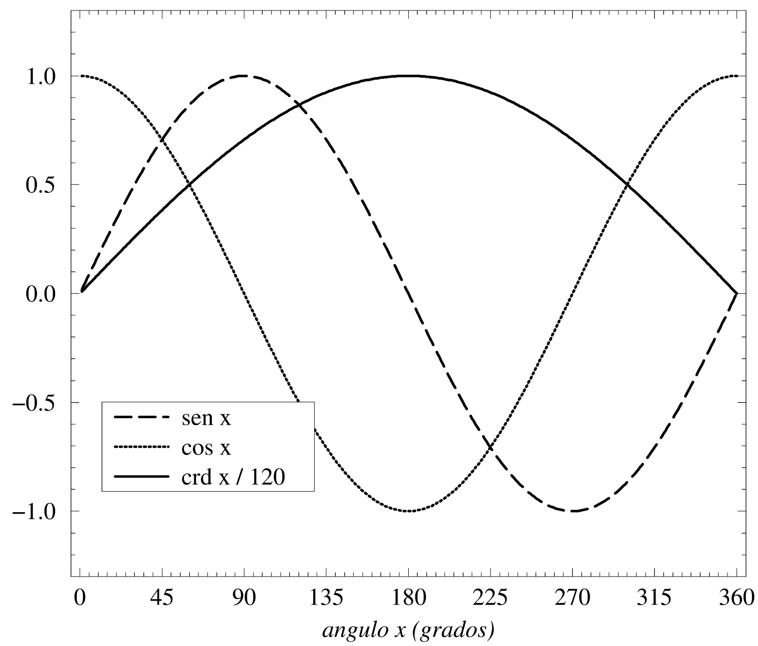

Figure 2: Comparación de las funciones seno, coseno y cuerda. (La cuerda ha sido dividida entre 120 para reducirla a la misma escala)

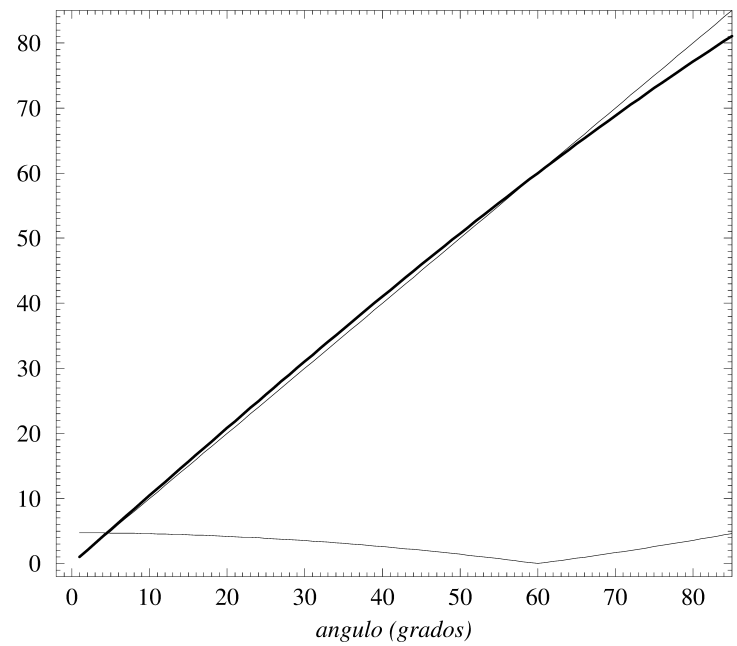

Figure 3: Entre 0 y 80, el valor de la cuerda se puede aproximar bien por el del arco expresado en grados. La línea gruesa representa la función cuerda. La recta diagonal es la bisectriz $y = x$. La curva en trazo fino representa el error relativo (%) cometido al tomar el arco por su cuerda

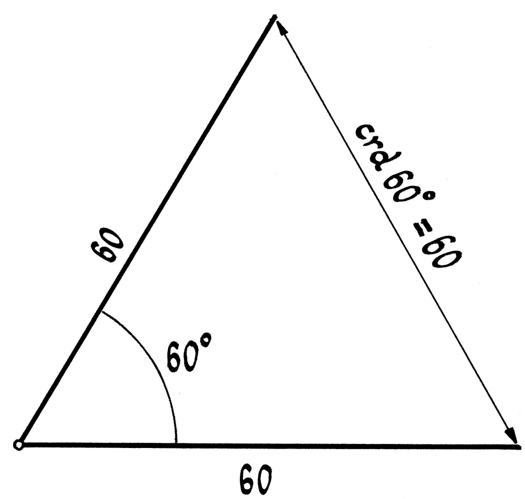

Figure 4: La cuerda de sesenta grados

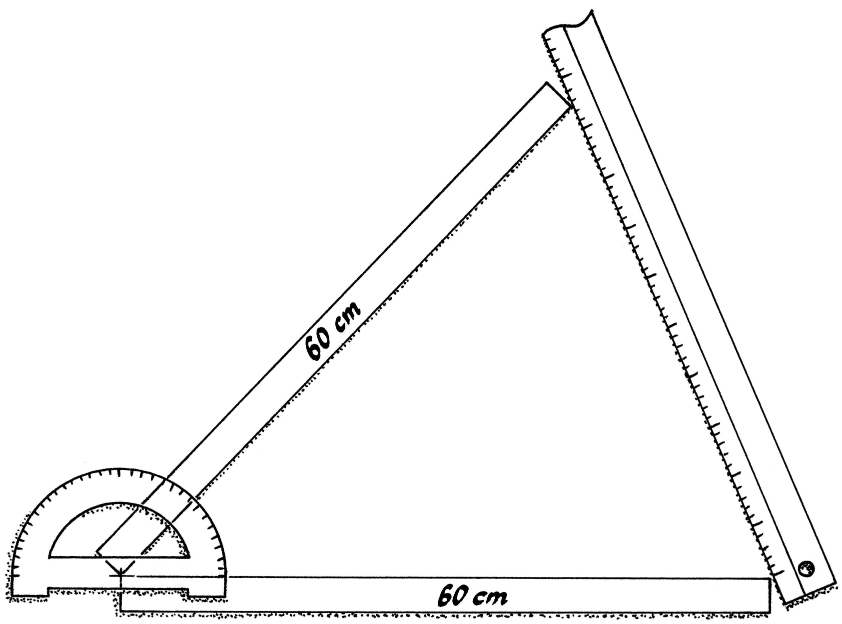

Figure 5: El medidor de cuerdas